ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ
КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

46 Прямоугольная система координат в пространстве

Если через точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление (оно обозначается стрелкой) и выбрана единица измерения отрезков*, то говорят, что задана **прямоугольная система координат** в пространстве (рис. 121). Прямые с выбранными на них направлениями называются **осями координат**, а их общая точка — **началом координат**. Она обозначается обычно буквой O. Оси координат обозначаются так: Ox, Oy, Oz — и имеют названия: ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат. Вся система координат обозначается $Oxyz$. Плоскости, проходящие соответственно через оси координат Ox и Oy, Oy и Oz, Oz и Ox, называются **координатными плоскостями** и обозначаются Oxy, Oyz, Ozx.

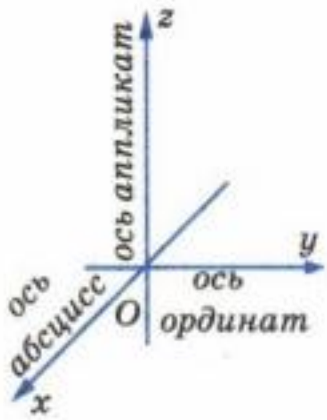

Рис. 121

Точка O разделяет каждую из осей координат на два луча. Луч, направление которого совпадает с направлением оси, называется **положительной полуосью**, а другой луч — **отрицательной полуосью**.

В прямоугольной системе координат каждой точке M пространства сопоставляется тройка чисел, которые называются ее **координатами**. Они определяются аналогично координатам точек на плоскости. Проведем через точку M три плоскости, перпендикулярные к осям координат, и обозначим через M_1, M_2 и M_3 точки пересечения этих плоскостей соответственно с осями абсцисс, ординат и аппликат (рис. 122). Первая координата точки M (она называется **абсциссой** и обозначается обычно буквой x) определяется так: $x = OM_1$, если M_1 — точка положительной полуоси; $x = -OM_1$, если M_1 — точка отрицательной полуоси; $x = 0$, если M_1 совпадает с точкой O. Аналогично с помощью точки M_2 определяется вторая координата **(ордината)** y точки M, а с помощью точки M_3 — третья координата **(аппликата)** z точки M. Координаты точки M записываются в скобках после обозначения точки: M (x; y; z), причем первой указывают абсциссу, второй — ординату, третьей — аппликату. На рисунке 123 изображены шесть точек A (9; 5; 10), B (4; –3; 6), C (9; 0; 0), D (4; 0; 5), E (0; 3; 0), F (0; 0; –3).

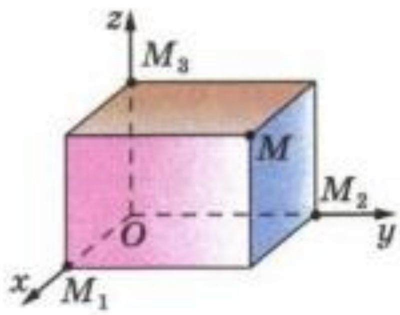

Рис. 122

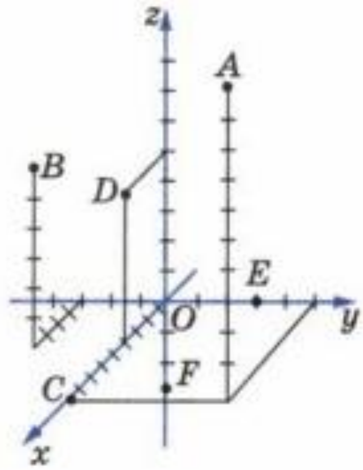

Рис. 123

Если точка M (x; y; z) лежит на координатной плоскости или на оси координат, то некоторые ее координаты равны нулю. Так, если $M \in Oxy$, то аппликата точки M равна нулю: $z = 0$. Аналогично если $M \in Oxz$, то $y = 0$, а если $M \in Oyz$, то $x = 0$. Если $M \in Ox$, то ордината и аппликата точки M равны нулю: $y = 0$ и $z = 0$ (например, у точки C на рисунке 123). Если $M \in Oy$, то $x = 0$ и $z = 0$; если $M \in Oz$, то $x = 0$ и $y = 0$. Все три координаты начала координат равны нулю: O (0; 0; 0).

47 Координаты вектора

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. На каждой из положительных полуосей отложим от начала координат **единичный вектор**, т. е. вектор, длина которого равна единице. Обозначим через $\vec{i}$ единичный вектор оси абсцисс, через $\vec{j}$ — единичный вектор оси ординат и через $\vec{k}$ — единичный вектор оси аппликат (рис. 124). Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ назовем **координатными векторами**. Очевидно, эти векторы не компланарны. Поэтому **любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде**

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

причем коэффициенты разложения x, y, z определяются единственным образом.

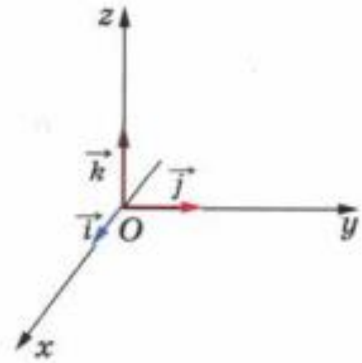

Рис. 124

Коэффициенты x, y и z в разложении вектора $\vec{a}$ по координатным векторам называются **координатами вектора $\vec{a}$ в данной системе координат**. Координаты вектора $\vec{a}$ будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{a}\{x; y; z\}$. На рисунке 125 изображен прямоугольный параллелепипед, имеющий следующие измерения: $OA_1 = 2$, $OA_2 = 2$, $OA_3 = 4$. Координаты векторов, изображенных на этом рисунке, таковы: $\vec{a}\{2; 2; 4\}$, $\vec{b}\{2; 2; -1\}$, $\overrightarrow{A_3A}\{2; 2; 0\}$, $\vec{i}\{1; 0; 0\}$, $\vec{j}\{0; 1; 0\}$, $\vec{k}\{0; 0; 1\}$.

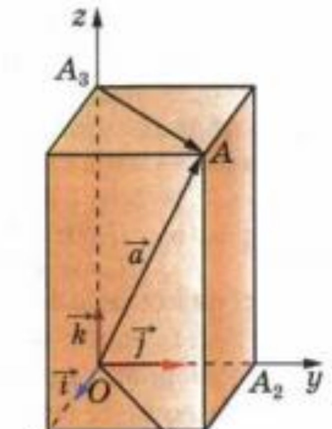

Рис. 125

Так как нулевой вектор можно представить в виде $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$, то все координаты нулевого вектора равны нулю. Далее, **координаты равных векторов соответственно равны**, т. е. если векторы $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ равны, то $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$ (объясните почему).

Рассмотрим правила, которые позволяют по координатам данных векторов найти координаты их суммы и разности, а также координаты произведения данного вектора на данное число.

1°. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов. Другими словами, если $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$.

2°. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов. Другими словами, если $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$.

3°. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число. Другими словами, если $\vec{a}\{x; y; z\}$ — данный вектор, α — данное число, то вектор $\alpha\vec{a}$ имеет координаты $\{\alpha x; \alpha y; \alpha z\}$.

Утверждения 1°—3° доказываются точно так же, как и для векторов на плоскости.

Рассмотренные правила позволяют находить координаты любого вектора, представленного в виде алгебраической суммы данных векторов, координаты которых известны. Рассмотрим пример.

Задача

Найти координаты вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$, если $\vec{a}\ \{1; -2; 0\}$, $\vec{b}\ \{0; 3; -6\}$, $\vec{c}\ \{-2; 3; 1\}$.

Решение

По правилу 3^0 вектор $2\vec{a}$ имеет координаты $\{2; -4; 0\}$, а вектор $\left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$ — координаты $\{0; -1; 2\}$. Так как $\vec{p} = (2\vec{a}) + \left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right) + \vec{c}$, то его координаты $\{x; y; z\}$ можно вычислить по правилу 1^0: $x = 2 + 0 - 2 = 0$, $y = -4 - 1 + 3 = -2$, $z = 0 + 2 + 1 = 3$. Итак, вектор $\vec{p}$ имеет координаты $\{0; -2; 3\}$.