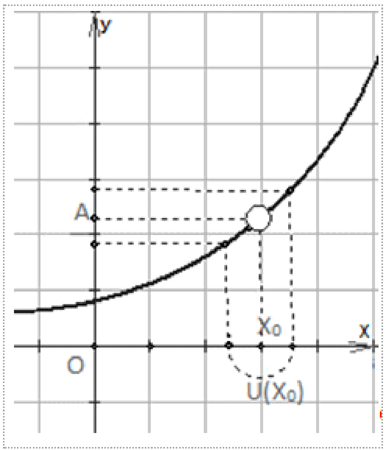
Определение и свойства пределов функции

Функция *f (x)* имеет **предел *A* в точке x_0**, если для всех значений *x*, достаточно близких к x_0 (в окрестности $U(x_0)$), значение *f (x)* близко к *A*. При этом x_0 может не принадлежать области определения функции *D(f)* , хотя окрестность точки x_0 $U(x_0)$ принадлежит *D(f)*. На графике это выглядит как выколотая точка.



Обозначение: $f\left(x\right)\to A$ при $x\to x_0$

или: $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=A$

Рассмотрим с помощью некоторых известных графиков функций **понятие предела на бесконечности**.

функция	**x → -∞**	**x → +∞**	**x → 0**
$f(x) = x^2$	→ +∞	→ +∞	→ 0
f (x) = 1 / x	→ 0	→ 0	→ +∞, -∞
$f(x) = x^3$	→ -∞	→ +∞	→ 0

Прямая *y = b* является **горизонтальной асимптотой** графика функции *y = f (x)*, если выполняется одно из равенств:

$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=b$ (рис. 1)

или $\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=b$

или $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=b.$

Прямая *x = a* является **вертикальной асимптотой** графика функции *y = f (x)*, если выполняется одно из равенств:

$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=b$ (рис. 1)

или $\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=b$

или $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=b.$

Прямая *x = a* является **вертикальной асимптотой** графика функции *y = f (x)*, если выполняется одно из равенств:

$\lim_{x\to a} f\left(x\right)=\infty$ (рис. 2)

или $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=+\infty$

или $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=-\infty$

Прямая *y = ax + b* является **наклонной асимптотой** графика функции *y = f (x)*, если выполняется одно из равенств:

$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=ax+b$ (рис. 3)

или $\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=ax+b$

или $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=ax+b$

Пример.

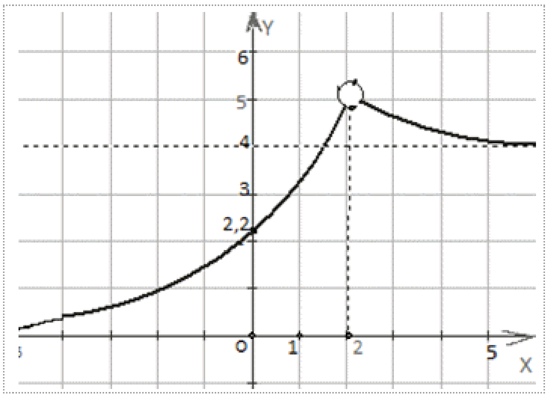
По графику y = f (x) найти:

а) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$

в) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2,2$

г) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$



Свойства пределов функции

1. **Предел постоянной величины** равен самой постоянной величине:

$$\lim_{x \to x_0} C = C$$

2. **Предел суммы двух функций** равен сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Аналогично предел разности двух функций равен разности пределов этих функций.

3. **Постоянный коэффициент** можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to x_0} kf(x) = k \lim_{x \to x_0} f(x)$$

4. **Предел произведения двух функций** равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

5. **Предел частного двух функций** равен отношению пределов этих функций при условии, что предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

Замечание.

Принято считать, что $\frac{const}{\infty}\to 0,\ \infty\cdot\infty\to\infty,\ \infty+\infty\to\infty,\ const\cdot\infty\to\infty.$

Следующие пределы считают **неопределенностью**: $\frac{\infty}{0},\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0}$. Если в примере встретилась неопределенность, то надо найти пути для ее устранения. **Общие правила:**

1) если в числителе и знаменателе находятся **многочлены**, и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то для решения нужно разложить числитель и знаменатель на множители или разделить на максимальную степень числителя (или знаменателя) и числитель и знаменатель;

2) если же в числителе или в знаменателе находятся **иррациональные выражения** и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то для решения надо избавляться от иррациональности, помножив и числитель, и знаменатель на сопряженное выражение;

3) если же в числителе или в знаменателе находятся **тригонометрические выражения** и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то для решения используют формулу замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Вычисление пределов функции

Пример 1.

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2-3x+5\right)=1-3+5=3.$$

Пример 2.

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-3x+5\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\left(\frac{3}{x}\right)^{\to 0}+\left(\frac{5}{x^2}\right)^{\to 0}\right)=\lim_{x\to\infty}x^2=\infty.$$

Пример 3.

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 0-1}{0^2+3\cdot 0-4}=\frac{1}{4}.$$

Пример 4.

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{2\cdot 1^2-3\cdot 1-5}{1+1}=-3.$$

Пример 5.

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{2\cdot 1^2+3\cdot 1-5}{-1+1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x-5)}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to -1}(2x-5)=2\cdot(-1)-5=-7.$$

Пример 6.

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{3x^2+x+1}="\frac{\infty}{\infty}"=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{3x^2+x+1}\times\frac{:x^2}{:x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\left(\frac{3}{x}\right)^{\to 0}-\left(\frac{5}{x^2}\right)^{\to 0}}{3+\left(\frac{1}{x}\right)^{\to 0}+\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\to 0}}=\frac{2}{3}.$$

Пример 7.

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}="\frac{\infty}{\infty}"=\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}\times\frac{:x^4}{:x^4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{7}{x}\right)^{\to 0}-\left(\frac{15}{x^2}\right)^{\to 0}+\left(\frac{9}{x^3}\right)^{\to 0}+\left(\frac{1}{x^4}\right)^{\to 0}}{5+\left(\frac{6}{x^2}\right)^{\to 0}-\left(\frac{3}{x^3}\right)^{\to 0}-\left(\frac{4}{x^4}\right)^{\to 0}}=\frac{0}{5}=0.$$

Пример 8.

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 11x}{2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 11x}{2\cdot\frac{11x}{11}}=\lim_{x\to 0}\frac{11}{2}\cdot\frac{\sin 11x}{11x}=5{,}5.$$

Пример 9.

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x}{\operatorname{tg}4x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{8x}{4x\cdot\frac{\operatorname{tg}4x}{4x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\frac{\sin 4x}{4x\cos 4x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 4x}{\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^{\to 1}}==\lim_{x\to 0}2\cos 4x=2.$$